Números y desigualdades

Lo que debes saber

Distintas clases de números

Números naturales. Los números **naturales** 1,2,3,... . El conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{N}$.

Números enteros. Los números **enteros** ...,-2,-1,0,1,2,... cuyo conjunto se representa por $\mathbb{Z}$.

Números racionales. Los números **racionales** que son cocientes de la forma p/q donde $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, cuyo conjunto representamos por $\mathbb{Q}$.

Números irracionales. También conoces otros números como $\sqrt{2}$, π, o el número e que no son números racionales y que se llaman, con una expresión no demasiado afortunada, ***números irracionales***.

Números reales. El conjunto formado por todos los números racionales e irracionales se llama conjunto de los **números reales** y se representa por $\mathbb{R}$.

Es claro que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Axiomas de los números reales

Axiomas algebraicos

Propiedades asociativas. $(x+y)+z = x+(y+z)$, $\quad (xy)z = x(yz)$.

Propiedades conmutativa.s $\quad x+y = y+x$, $\quad xy = yx$.

Elementos neutros. El 0 y el 1 son tan importantes que enunciamos seguidamente sus propiedades: $0+x = x$, $1x = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Elementos opuesto e inverso. Para cada $x \in \mathbb{R}$ hay un número real llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x$, tal que $x+(-x) = 0$. Para cada número real $x \neq 0$ hay un número real llamado *inverso de* x, que representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$.

Observación importante. $-x$ no debe leerse “menos x” sino “opuesto de x”.

Propiedad distributiva. $\quad (x+y)z = xz + yz$.

Algunas consecuencias de los axiomas algebraicos

- Cualquier número multiplicado por 0 es igual a 0: $0x = 0$.
- El 0 no tiene inverso. No se puede dividir por 0.
- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que $(-x)y = -xy$.
- Para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que $(-x)(-y) = xy$.

Axiomas de orden

Los números suelen representarse como puntos de una recta en la que se fija un origen, el 0, de forma arbitraria. Los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. Se verifican las siguientes propiedades.

- **Ley de tricotomía.** Para cada número real x se verifica una sola de las siguientes tres afirmaciones: $x = 0$, x es positivo, $-x$ es positivo.
- **Estabilidad de $\mathbb{R}^+$.** La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Los elementos del conjunto $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$ se llaman *números negativos*.

Definición. Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase x *es menor que* y) o $y > x$ (léase y *es mayor que* x) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Notación. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}^+_o = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^-_o = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Reglas para trabajar con desigualdades

Se dice que dos igualdades o dos desigualdades son *equivalentes* cuando siempre que una de ellas es cierta también lo es la otra. En lo que sigue se supone que a, b, c son números reales.

- Las desigualdades $a < b$ y $a + c < b + c$ son equivalentes.
- Para todo $c > 0$ se verifica que las desigualdades $a < b$ y $ac < bc$ son equivalentes.
- Para todo $c < 0$ se verifica que las desigualdades $a < b$ y $ac > bc$ son equivalentes.
- Se verifica que $ab > 0$ si, y sólo si, a e b son los dos positivos o los dos negativos. En particular, si $a \neq 0$ entonces se verifica que $a^2 > 0$.
- Las desigualdades $a > 0$ y $\dfrac{1}{a} > 0$ son equivalentes.
- Supuesto que a y b son los dos positivos o los dos negativos, se verifica que las desigualdades $a < b$ y $\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$ son equivalentes.

Definición. Se dice que un conjunto no vacío de números reales, $A \subset \mathbb{R}$, tiene *máximo* si hay un número $M \in A$ que es el mayor de todos los elementos de A, es decir, $x \leqslant M$ para todo $x \in A$. Cuando esto ocurre, escribimos $M = \text{máx} A$. Se dice que un conjunto no vacío de números reales, $A \subset \mathbb{R}$, tiene *mínimo* si hay un número $m \in A$ que es el menor de todos los elementos de A, es decir, $m \leqslant x$ para todo $x \in A$. Cuando esto ocurre, escribimos $m = \text{mín} A$.

Valor absoluto. El *valor absoluto* de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Geométricamente, $|x|$ representa la distancia de x al origen, 0, en la recta real. De manera más general:

$$|x - y| = \text{distancia entre } x \text{ e } y$$

representa la longitud del segmento de extremos x e y.

Estrategia útil para probar desigualdades entre números positivos

- Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que las igualdades $a = b$ y $a^2 = b^2$ son equivalentes.
- Supuesto que $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$, se verifica que las desigualdades $a < b$ y $a^2 < b^2$ son equivalentes.

Propiedades del valor absoluto. Para $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

i) $|x| \leqslant y$ es equivalente a $-y \leqslant x \leqslant y$.

ii) $|xy| = |x||y|$.

iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Además, se verifica que $|x + y| = |x| + |y|$ si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

iv) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

El apartado iii) se conoce como **(desigualdad triangular)**.

Te recuerdo que debes leer de forma correcta las propiedades anteriores: no te fijes en las letras sino en los conceptos. La propiedad ii) debes leerla *"el valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos"*. Por su parte, la desigualdad triangular dice dos cosas:

- *El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos.*
- *El valor absoluto de una suma es igual a la suma de los valores absolutos si, y sólo si, todos los sumandos son positivos o todos todos los sumandos son negativos.*

La siguiente desigualdad es una de las más útiles del Análisis Matemático.

Desigualdad de las medias. Cualesquiera sean los números positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ se verifica que:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Intervalos

Usaremos las siguientes notaciones para los distintos tipos de intervalos.

Intervalos que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leqslant b$ son números reales):

$$\begin{array}{lcll}
[a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} & \text{(intervalo cerrado)} \\
]a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} & \text{(intervalo abierto)} \\
[a,b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} & \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)} \\
]a,b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{array}$$

Intervalos que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$\begin{array}{rcll}
]-\infty,c[& = & \{x \in \mathbb{R} : x < c\} & \text{(semirrecta abierta a la izquierda)} \\
]-\infty,c] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)} \\
]c,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : x > c\} & \text{(semirrecta abierta a la derecha)} \\
[c,+\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\} & \text{(semirrecta cerrada a la derecha)}
\end{array}$$

Finalmente, la recta real $\mathbb{R}$, es también un intervalo. Hay caprichosos a quienes les gusta escribir $\mathbb{R}=]-\infty,+\infty[$.

Ejercicios típicos de desigualdades

Desigualdades entre polinomios. Supongamos que $p(x)$ es una función polinómica de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $p(x) > 0$.

En este tipo de ejercicios hay que tener en cuenta el siguiente resultado.

> *Una función polinómica solamente puede cambiar de signo en los puntos donde se anula, y por tanto entre cada par de raíces* **consecutivas** *dicha función es siempre positiva o siempre negativa.*

Naturalmente, para poder usar este resultado debemos empezar por calcular las raíces reales de la ecuación $p(x) = 0$. Esto solamente puede hacerse en casos sencillos como, por ejemplo, calcular las *raíces enteras* de un polinomio con coeficientes enteros y coeficiente del término de mayor grado igual a 1, pues sabemos que dichas raíces deben ser divisores del término independiente.

Si nos piden estudiar para qué valores de la variable x se verifica una desigualdad del tipo $p(x) < q(x)$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas, basta observar que la desigualdades $p(x) < q(x)$ y $q(x) - p(x) > 0$ son equivalentes y que $q(x) - p(x)$ es una función polinómica por lo que podemos seguir el mismo procedimiento anterior.

Observación importante. Podemos usar el hecho de que las desigualdades $ab \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ son equivalentes cuando $a \geqslant 0$ para simplificar el estudio del signo de una función polinómica.

Por ejemplo, sea la función polinómica $p(x) = (x+2)^3(x+1)^2x(x-1)^5(x-4)^6(x^2+x+1)$. Como $(x+1)^2 \geqslant 0$, $(x-4)^6 \geqslant 0$ y x^2+x+1 es un trinomio con raíces imaginarias y cuyo coeficiente del término x^2 es positivo, por lo que se verifica que $x^2+x+1 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (de hecho $x^2+x+1 = (x+1/2)^2+3/4 > 0$), deducimos que la desigualdad $p(x) \geqslant 0$ es equivalente a $(x+2)^3x(x-1)^5 \geqslant 0$.

Fíjate que lo que hemos hecho ha sido *prescindir de las raíces de orden par* (la raíz -1 de orden 2 y la raíz 4 de orden 6). También podemos prescindir de los trinomios con raíces complejas porque son siempre positivos o siempre negativos.

Podemos simplificar más teniendo en cuenta que si k es un número impar entonces a^k y a son los dos positivos o los dos negativos. Por tanto la desigualdad $(x+2)^3x(x-1)^5 \geqslant 0$ es equivalente a $(x+2)x(x-1) \geqslant 0$. Esta última ya es muy fácil de estudiar y deducimos que $p(x) \leqslant 0$ para $x < -2$, $p(x) \geqslant 0$ para $-2 < x < 0$, $p(x) \leqslant 0$ para $0 < x < 1$ y $p(x) \geqslant 0$ para $x > 1$. Teniendo ahora en cuenta que $p(x)$ solamente se anula en los puntos $-2, -1, 0, 1, 4$, podemos precisar el resultado obtenido como sigue:

$$\begin{aligned}
&p(x) < 0 \ \text{ para todo } \ x \in]-\infty, -2[\\
&p(x) > 0 \ \text{ para todo } \ x \in]-2, -1[\cup]-1, 0[\\
&p(x) < 0 \ \text{ para todo } \ x \in]0, 1[\\
&p(x) > 0 \ \text{ para todo } \ x \in]1, 4[\cup]4, +\infty[
\end{aligned}$$

Es fácil deducir de lo anterior el siguiente resultado.

> *Una función polinómica cambia de signo en las raíces reales de orden impar y no cambia de signo en las raíces de orden par.*

Desigualdades entre funciones racionales. Supongamos que $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinómicas de una variable, y queremos calcular para qué valores de la variable x se verifica que $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$. Se supone que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ no tienen factores comunes.

Para ello basta tener en cuenta que la desigualdad $\dfrac{p(x)}{q(x)} > 0$ es equivalente a la desigualdad $p(x)q(x) > 0$, la cual ya sabemos resolver porque $p(x)q(x)$ es una función polinómica.

Si nos piden estudiar para qué valores de la variable x se verifica una desigualdad del tipo $R(x) < Q(x)$, donde $R(x)$ y $Q(x)$ son funciones racionales, basta observar que la desigualdades $R(x) < Q(x)$ y $Q(x) - R(x) > 0$ son equivalentes y que $Q(x) - R(x)$ es una función racional por lo que podemos seguir el procedimiento indicado.

Igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos

- Igualdades del tipo $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$. Como consecuencia de la desigualdad triangular, la igualdad $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $f(x)g(x) \geqslant 0$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)| = |g(x)|$ es equivalente a la igualdad $(f(x))^2 = (g(x))^2$; y también es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$.
- Una igualdad del tipo $|f(x)| = g(x)$ es equivalente a que se verifique alguna de las igualdades $f(x) = g(x)$ o $f(x) = -g(x)$, y además que se verifique $g(x) \geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ es equivalente a la desigualdad $(f(x))^2 \leqslant (g(x))^2$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ también puede estudiarse calculando los valores de x para los que se da la igualdad $|f(x)| = |g(x)|$, es decir, los puntos en que se anula la función $h(x) = |f(x)| - |g(x)|$. Estos puntos determinan intervalos en los que la función $h(x)$ tiene signo constante.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \leqslant g(x)$ es equivalente a que se verifiquen las dos desigualdades $-g(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, y además que se verifique $g(x) \geqslant 0$.
- Una desigualdad del tipo $|f(x)| \geqslant g(x)$ se verifica para los valores de x tales que $g(x) < 0$; y para aquellos valores de x para los que $g(x) \geqslant 0$ es equivalente a que se verifique alguna de las dos desigualdades $f(x) \leqslant -g(x)$, $f(x) \geqslant g(x)$.

Observación importante. Las reglas anteriores se aplican exactamente igual para igualdades o desigualdades en las que intervienen más de una variable.

Por ejemplo, una igualdad del tipo $|f(x, y) + h(z)| = |f(x, y)| + |h(z)|$ es equivalente a la desigualdad $f(x, y)h(z) \geqslant 0$. Es posible que esta última desigualdad no pueda simplificarse, en cuyo caso debemos dejarla indicada tal como está.

En general, para resolver igualdades o desigualdades en las que intervienen valores absolutos se deben considerar todos los casos posibles para quitar los valores absolutos que aparecen.

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad $\left|x^2 - 6x + 8\right| = x - 2$.

Solución. La primera condición que debe cumplirse es que $x - 2 \geqslant 0$, esto es, $x \geqslant 2$. Para $x < 2$ la igualdad del enunciado no puede darse nunca. Supuesto que $x \geqslant 2$, la igualdad del enunciado equivale a que se verifique alguna de las igualdades:

$$\text{a) } x^2 - 6x + 8 = x - 2, \qquad \text{b) } x^2 - 6x + 8 = -x + 2$$

La igualdad a) es $x^2 - 7x + 10 = 0$, cuyas soluciones son 2 y 5. La igualdad b) es $x^2 - 5x + 6 = 0$, cuyas soluciones son 2 y 3. Observa que todas las soluciones obtenidas son mayores o iguales que 2. Concluimos que la igualdad del enunciado es cierta para $x = 2$, $x = 3$ y $x = 5$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\left|\dfrac{x-2}{x^2-2x-1}\right| > \dfrac{1}{2}$.

Solución. La desigualdad del enunciado equivale a que se verifique alguna de las desigualdades:

$$\text{a)}\ \frac{x-2}{x^2-2x-1} > \frac{1}{2}, \qquad \text{b)}\ \frac{x-2}{x^2-2x-1} < -\frac{1}{2}$$

La desigualdad a) es equivalente a:

$$\frac{x-2}{x^2-2x-1} - \frac{1}{2} = \frac{-x^2+4x-3}{2(x^2-2x-1)} > 0 \Longleftrightarrow (-x^2+4x-3)(x^2-2x-1) > 0$$

Calculando las raíces de los dos trinomios obtenemos que son, ordenadas de menor a mayor, $\left\{1-\sqrt{2}, 1, 1+\sqrt{2}, 3\right\}$. Son todas ellas *raíces impares* de orden 1 (raíces *simples*), por lo que el polinomio $p(x) = (-x^2+4x-3)(x^2-2x-1)$ *cambia de signo en todas ellas*. Fácilmente se ve que para $x < 1-\sqrt{2}$ se tiene que $p(x) < 0$. Deducimos que:

$$\begin{aligned}
p(x) &< 0 \ \text{ para todo } \ x \in]-\infty, 1-\sqrt{2}[\\
p(x) &> 0 \ \text{ para todo } \ x \in]1-\sqrt{2}, 1[\\
p(x) &< 0 \ \text{ para todo } \ x \in]1, 1+\sqrt{2}[\\
p(x) &> 0 \ \text{ para todo } \ x \in]1+\sqrt{2}, 3[\\
p(x) &< 0 \ \text{ para todo } \ x \in]3, +\infty[
\end{aligned}$$

Concluimos que la desigualdad a) se verifica para $x \in]1-\sqrt{2}, 1[\cup]1+\sqrt{2}, 3[$.

Análogamente se obtiene que la desigualdad b) se verifica para $x \in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[$.

Finalmente, la desigualdad del enunciado se verifica para

$$x \in]-\sqrt{5}, 1-\sqrt{2}[\cup]1-\sqrt{2}, 1[\cup]\sqrt{5}, 1+\sqrt{2}[\cup]1+\sqrt{2}, 3[.$$

☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la igualdad

$$|x^2+3x-9| = |x^2+x-6| + |2x-3|.$$

Solución. Poniendo $f(x) = x^2+x-6$ y $g(x) = 2x-3$, la igualdad del enunciado se escribe como $|f(x)+g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$, igualdad que equivale a $f(x)g(x) \geqslant 0$, es decir $(x^2+x-6)(2x-3) \geqslant 0$. Calculando las raíces del trinomio tenemos que

$$(x^2+x-6)(2x-3) = 2(x+3)(x-2)(x-3/2).$$

Por tanto, $f(x)g(x)$ es un polinomio cuyas raíces, $\{-3, 3/2, 2\}$, son simples y, por tanto, cambia de signo en todas ellas. Deducimos fácilmente que la desigualdad $f(x)g(x) \geqslant 0$ se verifica si $-3 \leqslant x \leqslant 3/2$, o si $x \geqslant 2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $|x^2-6x+5| > |x^2+2x-5|$.

Solución. Empezamos calculando los puntos en que se verifica que $|x^2-6x+5| = |x^2+2x-5|$. Puesto que dos números tienen igual valor absoluto si son iguales o son opuestos, esta igualdad equivale a que se verifique alguna de las dos igualdades $x^2-6x+5=x^2+2x-5$, $x^2-6x+5=-(x^2+2x-5)$. La primera solamente se verifica para $x=5/4$ y la segunda para $x=0$ y $x=2$. Deducimos que la función $h(x)=|x^2-6x+5|-|x^2+2x-5|$ tiene signo constante en los intervalos $]-\infty,0[$, $]0,5/4[$, $]5/4,2[$ y $]2,+\infty[$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} h(-1)=6 \quad &\Longrightarrow \quad h(x)>0 \text{ para todo } x\in]-\infty,0[\\ h(1)=-2 \quad &\Longrightarrow \quad h(x)<0 \text{ para todo } x\in]0,5/4[\\ h(3/2)=3/2 \quad &\Longrightarrow \quad h(x)>0 \text{ para todo } x\in]5/4,2[\\ h(3)=-6 \quad &\Longrightarrow \quad h(x)<0 \text{ para todo } x\in]2,+\infty[\end{aligned}$$

Por tanto, la desigualdad del enunciado se verifica para $x<0$ o para $5/4<x<2$. ☺

Ejemplo. Calcula para qué valores de x se verifica la siguiente desigualdad.

$$|x+1|+|x^2-3x+2|<4.$$

Solución. Puesto que $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, tenemos que

$$|x+1|+|x^2-3x+2|=|x+1|+|(x-1)(x-2)|=|x+1|+|x-1||x-2|.$$

Para controlar los valores absolutos consideraremos por separado los casos $x<-1$, $-1<x<1$, $1<x<2$ y $x>2$.

- Para $x<-1$ tenemos $|x+1|+|x-1||x-2|=-x-1+(1-x)(2-x)=x^2-4x+1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-4x+1<4$, es decir, $x^2-4x-3<0$. Es fácil comprobar que para $x<-1$ se verifica que $x^2-4x-3>0$. Por tanto, para $x<-1$ la desigualdad del enunciado es siempre falsa.

- Para $-1<x<1$ tenemos $|x+1|+|x-1||x-2|=x+1+(1-x)(2-x)=x^2-2x+3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-2x+3<4$, es decir, $x^2-2x-1<0$. Las raíces de este trinomio son $1-\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2-2x-1<0$ equivale a que $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$. Como $-1<1-\sqrt{2}<1$, concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $1-\sqrt{2}<x<1$.

- Para $1<x<2$ tenemos $|x+1|+|x-1||x-2|=x+1+(x-1)(2-x)=-x^2+4x-1$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $-x^2+4x-1<4$, es decir, $x^2-4x+5>0$. Este trinomio no tiene raíces reales, por tanto se verifica que $x^2-4x+5>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$ (observa que $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$). Concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $1<x<2$.

- Para $x>2$ tenemos $|x+1|+|x-1||x-2|=x+1+(x-1)(x-2)=x^2-2x+3$. Por tanto, la desigualdad del enunciado es $x^2-2x+3<4$, es decir, $x^2-2x-1<0$. Las raíces de este trinomio son $1-\sqrt{2}$ y $1+\sqrt{2}$. Es inmediato comprobar que $x^2-2x-1<0$ equivale a que $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$. Como $2<1+\sqrt{2}$, concluimos que la desigualdad del enunciado es válida para $2<x<1+\sqrt{2}$.

Para $x=-1$ la desigualdad no se verifica. Para $x=1$ y $x=2$ la desigualdad se verifica. Concluimos que la desigualdad se verifica para $1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$. ☺